

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记6——直线和曲线的参数方程

什么是参数方程

一般地，在平面直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标 x 、 y 都是某个变数 t 的函数：

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

并且对于 t 的每一个允许的取值，由方程组确定的点 (x, y) 都在这条曲线上，那么这个方程就叫做曲线的参数方程，联系变数 x 、 y 的变数 t 叫做参数，简称参数。相对而言，直接给出点坐标间关系的方程叫普通方程。

例如在运动学，参数通常是“时间”，而方程的结果是速度、位置等。用参数方程描述运动规律时，常常比用普通方程更为直接简便。对于解决求最大射程、最大高度、飞行时间或轨迹等一系列问题都比较理想。有些重要但较复杂的曲线（例如摆线），建立它们的普通方程比较困难，甚至不可能，有了参数方程，就可以很容易表达。

直线

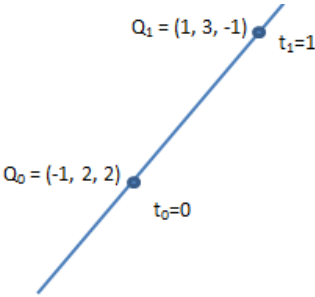
空间中的直线

空间中两个平面的交集是一条直线，如果抛开平面，直线可以看作是点匀速直线运动的轨迹。

通过两点确定一条直线，此外，已知一点和与直线平行的向量也能确定一条直线。

直线的参数方程

一个点在空间中匀速直线运动，它在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 时刻经过 $Q_0 = (-1, 2, 2)$ 和 $Q_1 = (1, 3, -1)$ 两点， $Q(t)$ 是该点关于时间 t 的函数：



如上图所示，点在 $t = 0$ 时刻的位置 $Q_0 = Q(0) = (-1, 2, 2)$ ， $t = 1$ 时刻的位置 $Q_1 = Q(1) = (1, 3, -1)$ ，那么在任意 t 时刻， Q 的位置 $Q(t)$ 是哪里？

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

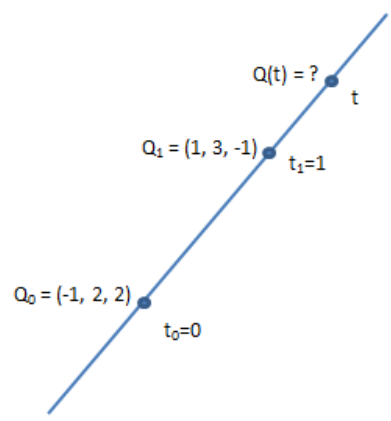
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

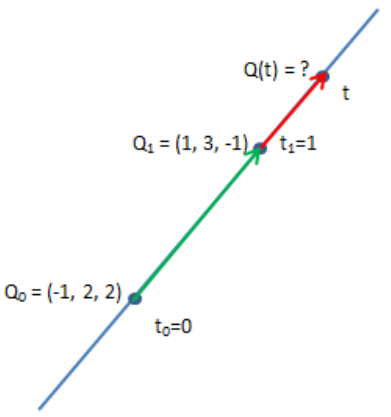
- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



现在将问题转换为向量：



由于是匀速运动，所以运动距离与时间成正比：

$$\frac{Q_0Q(t)}{Q_0Q_1} = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{t - 0}{1 - 0} = t$$
$$\overrightarrow{Q_0Q(t)} = t\overrightarrow{Q_0Q_1}$$

随着时间的增长，向量也将增长。由于Q(t)是空间内的点，所以：

$$Q(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$Q_0Q(t) = \langle x(t) + 1, y(t) - 2, z(t) - 2 \rangle$$

$$tQ_0Q_1 = t\langle 1 - (-1), 3 - 2, -1 - 2 \rangle = \langle 2t, t, -3t \rangle$$

$$\overrightarrow{Q_0Q(t)} = t\overrightarrow{Q_0Q_1} \Rightarrow$$

$$\langle x(t) + 1, y(t) - 2, z(t) - 2 \rangle = \langle 2t, t, -3t \rangle \Rightarrow$$

$$x(t) + 1 = 2t, \quad y(t) - 2 = t, \quad z(t) - 2 = -3t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = t + 2 \\ z(t) = -3t + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Q(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (2t - 1, t + 2, -3t + 2)$$

这就是该直线的参数方程，其来源是 $Q_0Q(t) = tQ_0Q_1$

如果t = 2，则在该时刻Q(2) = (3, 5, -4)

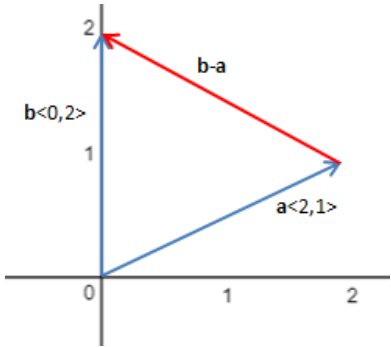
2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)
很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系
--trustInU

参数方程的几何解释

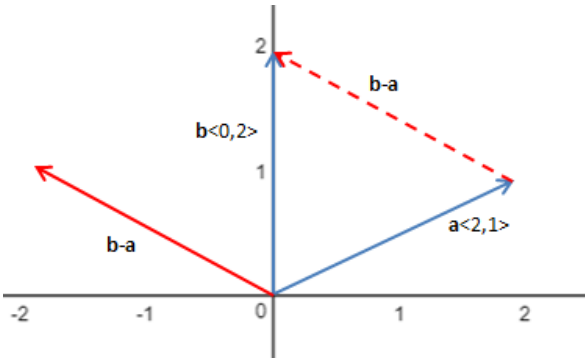
我们已经知道了直线参数方程的形式，现在看一下它的几何解释。

如果二维空间内有两个点(2,1)和(0,2)，那么经过这两点的直线方程是什么？

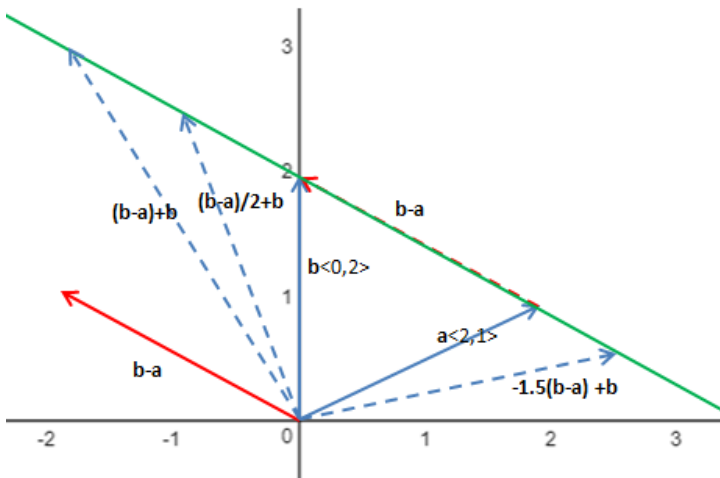
初中的知识可以告诉我们，斜率是 $k = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ 。现在使用向量和参数方程来理解这个问题。假设在二维空间内有两个向量 $\mathbf{a} <2,1>$ 和 $\mathbf{b} <0,2>$ ，如下图所示：



一个不太准确的说法是，将 $\mathbf{b-a}$ 的两端延长，就是所求的直线，只要能够恰当地表示这条直线就好了。由于向量表示的大小和方向的量，与位置无关，所以可以将 $\mathbf{b-a}$ 平移：



现在使用平移后的 $\mathbf{b-a}$ ，它与 $\mathbf{b}$ 的线性组合就可以表示所求直线（向量终点站直线上）：



将 $\mathbf{b-a}$ 的倍数设为t，那么直线可以表示为：

$$L = \mathbf{b} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2t \\ 2+t \end{bmatrix}$$

转换成 x, y 的参数方程, $x = -2t, y = 2 + t$

直线与平面的关系

上面的两个点 $Q_0 = (-1, 2, 2)$ 和 $Q_1 = (1, 3, -1)$ 对于平面 $x + 2y + 4z = 7$ 来说, 位置关系是什么? 在平面的两侧还是一侧? 是否在平面上?

将 Q_0 和 Q_1 代入平面方程:

$$-1 + 2 \times 2 + 4 \times 2 = 11 > 7$$

$$1 + 2 \times 3 + 4 \times (-1) = 3 < 7$$

由此可见 Q_0 和 Q_1 不在平面上, 它们分属于平面两侧, 向量 $\mathbf{Q_0Q_1}$ 将穿过平面, 与平面有唯一的交点, 这个交点又是什么?

上节已经求得了直线的参数方程 $Q(t) = (2t-1, t+2, -3t+2)$, 直线与平面的交点将满足:

$$(2t - 1) + 2(t + 2) + 4(-3t + 2) = 7$$

$$\text{解得 } t = \frac{1}{2}$$

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

将直线参数方程代入平面方程也可能出现有无数解或无解的情况, 此时直线与平面没有唯一交点, 直线可能在平面上或与平面平行。

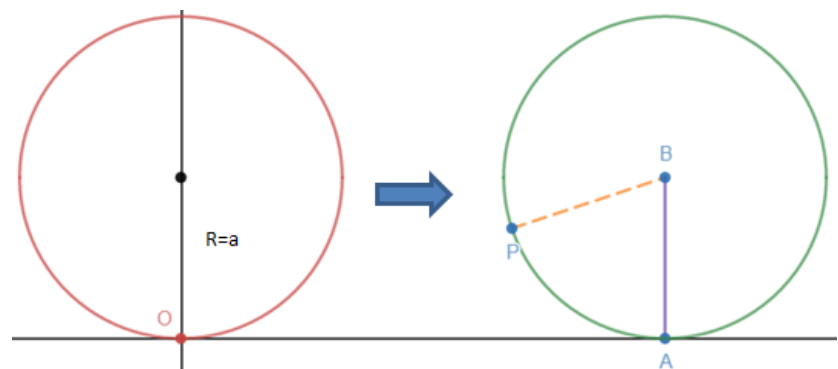
总结一下, 把直线方程 $Q(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 代入平面方程 $ax + by + c = d$, 如果能计算出 t 的唯一值, 直线穿过平面; 如果得到一个等于 d 的常数, 则直线在平面上; 如果得到一个不等于 d 的常数, 则直线与平面平行。

曲线

对于平面或空间内的任意运动, 同样可以用参数方程表示。

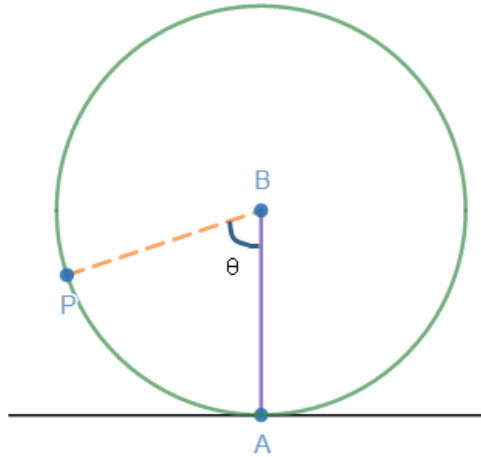
摆线的参数方程

摆线是一种有名的曲线, 它描述了当车辆匀速直线运动时, 车轮上点的运动轨迹。如下图所示, P 是半径为 a 的车轮边缘上的一点, 刚开始时在原点, 当车轮向右滚动后, P 点将随之转动:



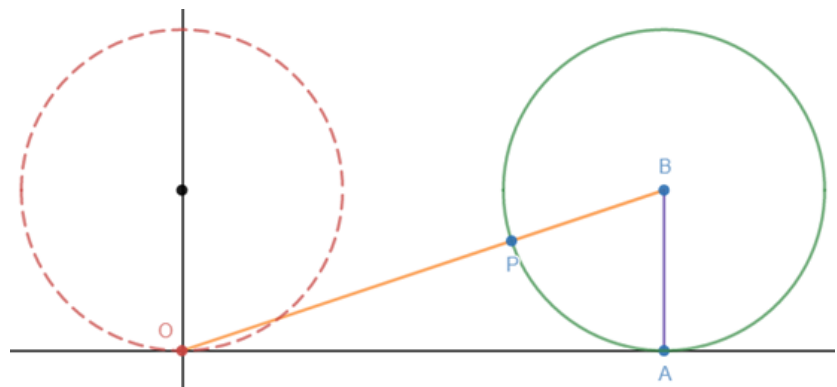
我们关注的问题是车轮滚动后 P 的轨迹, 也就是 t 时刻 P 点的位置。如果 P 点是位置关于时间的函数, 用参数方程可以表示为 $Q(t) = (x(t), y(t))$ 。这意味着从时间的角度来表示位置, 然而时间并非最好的参变量, 因为 P 的轨

迹是与时间无关的，即使车速变快，P的运动轨迹也不会改变。我们注意到，当车轮匀速运动时，P的角度和时间成正比：



$\angle\theta$ 和运动时间成正比，如果 θ 超过 2π ，则相当于开始了一个新的周期，对于角度的运算， 3π 和 π 是相同的。由此，可以将时间替换为角度，也就是使用车轮转动角度做参变量将得到更简单的答案：

$$P(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$$



将车轮转换为上图所示的向量(向量可参考《[线性代数笔记2——向量\(向量简介\)](#)》)，则向量 $\overrightarrow{OP}$ 的参数方程就可以表示P点的运动轨迹。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$$

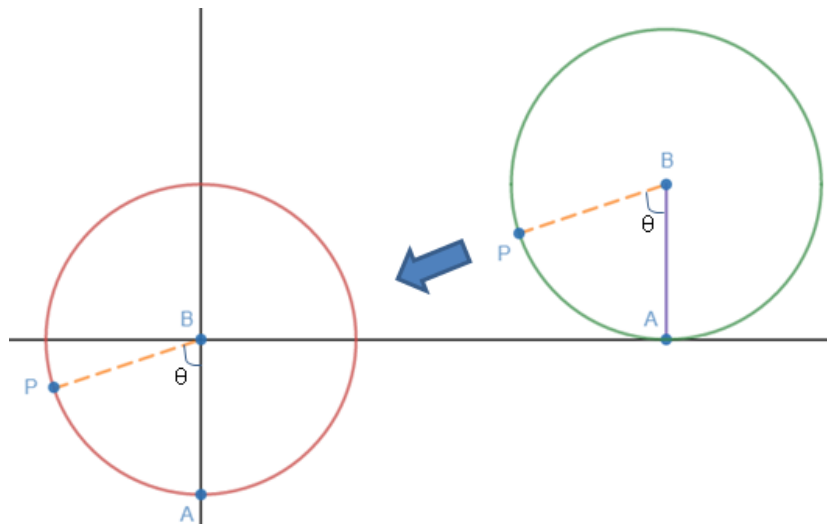
由于车轮是沿着地面转动，且最初P的位置与O相同，所以在第一圈时， $OA = PA$ 的弧长（我承认在画图时比较随意，看起来它们并不相等）：

$$OA = 2\pi a \times \frac{\theta}{2\pi} = a\theta$$

实际上，无论第几圈，上式都成立。由于已经知道了OA和AB的长度，可以得出相应的向量：

$$\overrightarrow{OA} = \langle a\theta, 0 \rangle, \quad \overrightarrow{AB} = \langle 0, a \rangle$$

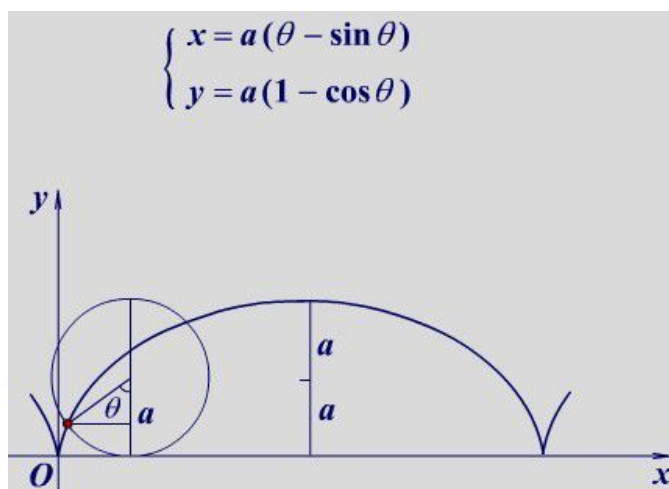
现在只需要求出向量 $\overrightarrow{BP}$ 即可。这里并不需要知道点B和点P的坐标，由于向量只描述了大小和方向，所以向量和具体位置无关，因此可以通过将向量 $\overrightarrow{BP}$ 平移求得 $\overrightarrow{BP}$ ：



$$\mathbf{BP} = \langle -a\sin\theta, -a\cos\theta \rangle$$

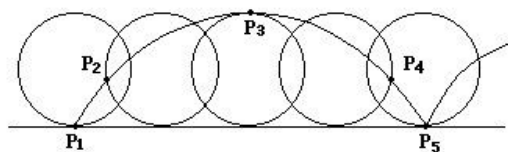
最终:

$$\begin{aligned}\mathbf{OP} &= \mathbf{OA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BP} \\ &= \langle a\theta, 0 \rangle + \langle 0, a \rangle + \langle -a\sin\theta, -a\cos\theta \rangle \\ &= \langle a\theta - a\sin\theta, a - a\cos\theta \rangle\end{aligned}$$



摆线的斜率

在车轮滚动一圈后，点P回到x轴，开始进入下一个周期，两个周期相交于一点。有一个值得关注的问题是，如果在该点处作轨迹曲线的切线，切线的斜率是什么？如下图所示，就是计算 P_5 处轨迹曲线的切线：



为了简化问题，将当车轮看作单位圆，此时 $a = 1$,

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta - \sin\theta \\ y(\theta) = 1 - \cos\theta \end{cases}$$

在 P_5 处， $\theta = 2\pi$ ，斜率：

$$K_{P5} = \frac{y}{x} = \frac{2\pi - \sin 2\pi}{1 - \cos 2\pi} = \frac{2\pi}{0}$$

此时没有意义，但可以计算极限：

$$K_{P5} \approx \lim_{\theta \rightarrow 2\pi} \frac{\theta - \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \infty$$

因此，在 P_5 处，斜率趋近于 ∞ ，也就是有一条垂直于 x 轴的切线。

也可以使用泰勒展开式计算斜率（泰勒级数可参考《[数学笔记31——幂级数和泰勒级数](#)》）：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\sin(\theta) \approx \sin 0 + \theta \cos 0 + \left(\frac{-\theta^2 \sin 0}{2!}\right) + \left(\frac{-\theta^3 \cos 0}{3!}\right) = \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

$$\cos(\theta) \approx \cos 0 + (-\theta \sin 0) + \left(\frac{-\theta^2 \cos 0}{2!}\right) + \left(\frac{\theta^3 \sin 0}{3!}\right) = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta - \sin \theta \approx \theta - \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = \frac{\theta^3}{6} \\ y(\theta) = 1 - \cos \theta \approx 1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{\theta^2}{2} \end{cases}$$

$$K_{P5} = \frac{y}{x} \approx \frac{\theta^2/2}{\theta^3/6} = \frac{3}{\theta}$$

$$\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{3}{\theta} \rightarrow \infty$$

示例

示例1

两条直线 L_1 和 L_2 是否相交，如果相交，其交点是什么？

$$L_1 = \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \end{cases}, L_2 = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$$

可以用以往的知识将参数方程转换为普通方程：

$$\begin{cases} L_1: y = -x + 3 \\ L_2: y = 2x \end{cases}$$

方程组有唯一解， $x = 1, y = 2$ ，两条直线相交于 $(1, 2)$

也可以直接用参数方程求解。如果两条直线相交，参数方程组有唯一解：

$$\begin{cases} x_{L1} = x_{L2} \\ y_{L1} = y_{L2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - t_{L1} = 2 + t_{L2} \\ 1 + t_{L1} = 4 + 2t_{L2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{L1} = 1 \\ t_{L2} = -1 \end{cases}$$

将解代入参数方程：

$$L_1(t_{L1}) = \begin{cases} x = 2 - t_{L1} = 1 \\ y = 1 + t_{L1} = 2 \end{cases}, L_2(t_{L2}) = \begin{cases} x = 2 + t_{L2} = 1 \\ y = 4 + 2t_{L2} = 2 \end{cases}$$

两条直线相交于(1, 2)

示例2

直线L经过P(0, -1, 1)和Q(2, 3, 3)两点, 直线与平面 $2x + y - z = 1$ 的关系?

设直线方程是 $L(x(t), y(t), z(t))$, 则:

$$PL(t) = tPQ \Rightarrow$$

$$\langle x(t) - 0, y(t) + 1, z(t) - 1 \rangle = t\langle 2, 4, 2 \rangle \Rightarrow$$

$$L = \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4t - 1 \\ z(t) = 2t + 1 \end{cases}$$

将L的参数方程代入平面方程:

$$2(2t) + (4t - 1) - (2t + 1) = 6t - 2 = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

t有唯一解, 指向与平面相交。将t代入直线的参数方程, 交点是(1, 1, 2)

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: 线性代数

标签: 参数方程, 直线, 向量, 摆线

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+ 加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: 线性代数笔记5——平面方程与矩阵

» 下一篇: 多变量微积分笔记1——偏导数

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告

永中DCS，文档在线预览处理专家

10年行业经验，受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐

了解详情

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间：2022年3月8日-3月18日



最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes